Concours Centrale - Supélec 1996
Épreuve : MATHÉMATIQUES I
Option M, P′
Durée 4 heures
* * *

## Correction

# Partie I - Question préliminaire

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F(x) \quad = \quad \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \tag{1}$$

• Pour $n = 1$, on a bien $F(x) = \lambda F(x+a) + f(x) = \lambda^0 F(x+0a) + \sum_{k=0}^{0} \lambda^k f(x+ka)$, donc $\mathscr{P}(1)$ est bien vérifiée.

• Supposons la propriété vraie au rang $n$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a par hypothèse de récurrence que

$$F(x+a) = \lambda^n F(x+a+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+a+ka).$$

De plus $(1)$ s'écrit $F(x) = \lambda F(x+a) + f(x)$, d'où :

$$F(x) \quad = \quad \lambda \left( \lambda^n F(x+a+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+a+ka) \right) + f(x) \tag{2}$$

$$= \quad \lambda^{n+1} F(x+a+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} f(x+a+ka) + f(x) \tag{3}$$

$$= \quad \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) + \sum_{k=0}^{n} \lambda^k f(x+ka). \tag{4}$$

La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
Même raisonnement pour la deuxième égalité en remarquant que $(1)$ est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \lambda^{-1} F(x-a) - \lambda^{-1} f(x).$$

# Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) La fonction nulle appartient à $\mathscr{L}$. De plus, si $f$ et $g$ sont lipschitziennes de constantes $K_f$ et $K_g$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est lipschitzienne de constante $|\alpha| K_f + |\beta| K_g$ car, par l'inégalité triangulaire,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)| \leq |\alpha| K_f |x-y| + |\beta| K_g |x-y| = (|\alpha| K_f + |\beta| K_g) \, |x-y|.$$

II.2) Supposons $f \in \mathscr{L}$. Alors pour tout $x \neq y$, on a :

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq K_f$$

En faisant tendre $y$ vers $x$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq K_f$.
Réciproquement, si $f'$ est bornée par une constante $K$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$

II.3) Soient $f$ et $g$ deux fonctions lipschitziennes bornées. Alors pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-f(y)g(y)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)| && (5)\\ &\leq \|f\|_\infty^{\mathbb{R}}|g(x)-g(y)|+\|g\|_\infty^{\mathbb{R}}|f(x)-f(y)| && (6)\\ &\leq \left(\|f\|_\infty^{\mathbb{R}}K_g+\|g\|_\infty^{\mathbb{R}}K_f\right)|x-y| && (7)\end{aligned}$$

où, pour $h \in \mathscr{F}$ et bornée, $\|h\|_\infty^{\mathbb{R}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$.

Considérons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sin(x)$. Comme ces fonctions sont dérivables et lipschitziennes, il suffit d'étudier le caractère borné de $(fg)'$ pour conclure. Or $x \mapsto (fg)'(x) = (x+1)\sin(x)$ n'est pas bornée, ce qui fournit un contre exemple.

II.4) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(x_0)| \leq K_f|x-x_0|$. Et

$$|f(x)|-|f(x_0)| \leq K_f|x|+K_f|x_0|$$

ce qui donne le résultat avec $A = K_f$ et $B = K_f|x_0|+|f(x_0)|$.

II.5) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par symétrie, on peut supposer $x \geq y$. En notant $n = E(x-y)$, la partie entière de $x-y$, alors il existe $t \in [0,1[$, tel que $x = y+n+t$, et donc

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(y+n)+f(y+n)-f(y+n+1)+...+f(y+1)-f(y)|\\ &\leq |y+n-x|+|1|+...+|1|\\ &\leq M(t+1+...+1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$.

# Partie III - Étude de (1) pour $\lambda \neq 1$

III.A- On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq A|x|+B$ d'après la partie précédente. D'où

$$|\lambda|^n|f(x+na)| \leq |\lambda|^n(A|x+na|+B)$$

qui est le terme général d'une série convergente ( par utilisation de la règle de D'Alembert par exemple ).

b) Il suffit alors de constater que $F$ est bien définie par ce qui précède, et qu'elle vérifie (1). L'unicité est acquise par la condition nécessaire de la question préliminaire et de plus, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} |F(x)-F(y)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(f(x+na)-f(y+na))\right| && (8)\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^n|f(x+na)-f(y+na)| && (9)\\ &\leq \left(\frac{1}{1-|\lambda|}\right)|x-y| && (10)\end{aligned}$$

et donc $F \in \mathscr{L}$.

III.A.2) **Étude de trois cas particuliers**

a) $f_1$ est lipschitzienne de rapport nul, donc $f_1 \in \mathscr{L}$. Pour calculer $F_1$ on applique le calcul de la série géométrique pour obtenir $F_1(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

b) $f_2 \in \mathscr{L}$ car elle est dérivable à dérivée bornée. Pour $F_2$ on utilise la même technique

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n(\exp(ix+ina)+\exp(-ix-ina)) && (11)\\
&= \frac{\exp(ix)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\exp(ia))^n + \frac{\exp(-ix)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\exp(-ia))^n && (12)\\
&= \frac{\exp(ix)}{2}\frac{1}{1-\lambda\exp(ia)} + \frac{\exp(-ix)}{2}\frac{1}{1-\lambda\exp(-ia)} && (13)\\
&= \frac{\exp(ix)(1-\lambda\exp(-ia)+\exp(-ix)(1-\lambda\exp(ia)}{2(1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2)} && (14)\\
&= \frac{\cos(x)-\lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2} && (15)
\end{aligned}$$

c) Mêmes calculs pour $f_3$. On trouve $F_3(x) = \dfrac{\sin(x)-\lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2}$.

III.B- **On suppose dans cette sous-partie que** $|\lambda| > 1$**.**

III.B.1) a) L'argument est identique aux questions précédentes, puisque $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| < 1$. Il suffit donc d'appliquer les résultats précédents en remplaçant $a$ par $-a$ et $\lambda$ par $\dfrac{1}{\lambda}$, qui vérifie $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| < 1$.

b) En remplaçant $x$ par $x-a$ et en divisant par $-\lambda$, (1) se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \frac{1}{\lambda}F(x-a) = -\frac{1}{\lambda}f(x-a).$$

En posant $b = -a,\ \mu = \dfrac{1}{\lambda}$ et $g(x) = -\dfrac{1}{\lambda}f(x-a)$, cela devient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \mu F(x+b) = g(x).$$

La fonction $g$ appartient évidemment à $\mathscr{L}$. Comme $|\mu| < 1$, on peut appliquer ce qui prcède : (1) admet donc une unique solution $F$ dans $\mathscr{L}$ et elle est donnée par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n g(x+nb) = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}f(x-(n+1)a) = -\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}f(x-na).$$

III.B.2) Les calculs sont très semblables à ceux du **A.2)**. On trouve pour $F_1, F_2$ et $F_3$ les mêmes expressions qu'en A2).

# Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A- **On suppose dans cette sous-partie que** $\lambda = 1$**.**

IV.A.1) Soit $F$ lipschitzienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) - F(x+a) = f(x)$. Alors

$$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leq K_F|a|$$

et il est donc nécessaire que $f$ soit bornée.

IV.A.2) a) Toute fonction $x \mapsto A\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$ avec $A \in \mathbb{R}$ convient, une telle fonction n'est donc pas unique.

b) Comme précédemment, toute fonction $x \mapsto A\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$ convient.

IV.A.3) a) $\lim\limits_{\lambda\to 1} F_{2,\lambda}(x) = \dfrac{\cos x - \cos(x-a)}{2(1-\cos a)}$, notons $F(x)$ cette limite. $F$ est lipschitzienne car $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
En passant à la limite quand $\lambda$ tend vers 1 dans l'égalité (1) vérifiée par $F_{2,\lambda}$, on obtient $F(x) - F(x+a) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $F$ vérifie bien (1) avec $\lambda = 1$.

b) Par l'absurde, supposons qu'une fonction $F$ de $\mathscr{L}$ vérifie $F(x) - F(x+2\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'égalité (2) s'écrit ici $F(x) - F(x+2n\pi) = n\cos x$. En prenant $x = 0$ et $x = \pi$, on obtient $F(0) - F(2n\pi) = n$ et $F(\pi) - F((2n+1)\pi) = -n$ puis, par différence, $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = 2n + F(\pi) - F(0)$, ce qui est absurde car $|F((2n+1)\pi) - F(2n\pi)| \leq K_F\pi$.

IV.B- **On suppose dans cette sous-partie** $\lambda = -1$.

IV.B.1) a) On peut par exemple prendre la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ qui est bien lipschitzienne, puisque sa dérivée est bornée.

b) Comme au **A.2)b)**, si $F$ est une solution de (1) dans $\mathscr{L}$, $x \mapsto F(x) + \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ en est une autre.

IV.B.2) a) $\lim\limits_{\lambda \to -1} F_{2,\lambda}(x) = \dfrac{\cos x + \cos(x-a)}{2(1+\cos a)}$, notons $F(x)$ cette limite. Les mêmes arguments qu'au **A.3)a)** montrent que $F \in \mathscr{L}$ et que $F$ vérifie (1) avec $\lambda = -1$.

b) Par l'absurde, supposons qu'une fonction $F$ de $\mathscr{L}$ vérifie $F(x) + F(x+\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On aurait aussi $F(x+\pi) + F(x+2\pi) = -\cos x$ et, par différence, $F(x) - F(x+2\pi) = 2\cos x$. $\dfrac{F}{2}$ serait donc un élément de $\mathscr{L}$ vérifiant (1) avec $\lambda = 1$ et $a = 2\pi$, on a vu en **A.3)b)** que c'est impossible.

IV.B.3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite de terme général $f(x+n)$ est positive, décroissante et tend vers 0. La série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n f(x+n)$ est donc convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

b) On pose comme dans la question précédente $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(x+n)$. Alors

$$F(x+1) + F(x) = f(x)$$

et par le théorème des séries alternées, $0 \leq F(x) \leq f(x)$, donc $F$ est aussi de limite nulle en $+\infty$.
Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $0 \leq x - y \leq 1$, et

$$F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (f(x+n) - f(y+n)).$$

L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de $f$ et la croissance de $f'$ donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(x+n) - f(y+n) \leq (x-y)f'(x+n) \leq (x-y)f'(x+n+1) \leq f(x+n+1) - f(y+n+1) \leq 0.$$

$F(x) - F(y)$ apparait donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que

$$|F(x) - F(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq K_f(x-y).$$

D'après la partie précédente, on peut en déduire que $F$ appartient à $\mathscr{L}$. Soit enfin $G$ une fonction de $\mathscr{L}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifie (1). La fonction $G - F$ est 1-antipériodique ($\forall x \in \mathbb{R},\ (G-F)(x+1) = -(G-F)(x)$) et tend vers 0 en $+\infty$, donc est nulle, $F$ est bien la seule solution dans $\mathscr{L}$ qui tend vers 0 en $+\infty$

• • • • • • • • •